

Лекція 3. Площина в геометричному просторі.

Поняття площини є одним із первісних геометричних понять. Вважатимемо, що у просторі обрана та зафіксована деяка ПДСК. Якщо визначити деякий напрямок з допомогою, наприклад, вектора $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$, то тим самим визначена множина площин, перпендикулярних даному напрямку. Вектор \mathbf{n} зветься **нормаллю** цих площин.

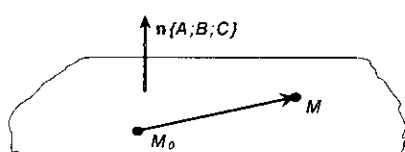


Рис. 1

Щоб визначити серед цієї множини конкретну площину, досить вказати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній (див. рис. 1). Позначимо $M(x, y, z)$ довільну точку цієї площини. Тоді вектори $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ та \mathbf{n} будуть ортогональними, а отже,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1)$$

є векторним рівнянням площини. Тут \mathbf{r} та \mathbf{r}_0 – відповідно радіус-вектори точок M та M_0 . Записавши рівність (1) у координатній формі, матимемо **рівняння площини, заданої точкою та нормаллю**:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Рівняння (2), яке задає площину, є рівнянням першого порядку виду} \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Покажемо, що й навпаки, будь-яке рівняння першого порядку (3) визначає деяку площину у просторі. З цією метою розглянемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє рівняння (3). Для неї виконана рівність $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Віднявши її від рівняння (3), одержимо рівність (2), яка виражає умову ортогональності вектора $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$, який належить розглядуваному геометричному об'єкту, та деякого фіксованого вектора $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$. Отже, рівняння (3) задає деяку площину. Воно називається **загальним рівнянням площини**. Дослідимо частинні випадки цього рівняння, коли деякі коефіцієнти в ньому рівні нулевим.

1. Припустимо, що $A = 0$. Тоді вектор нормалі площини, очевидно, ортогональний до осі OX , а сама площина їй паралельна.
2. Припустимо, що $A = B = 0$. Тоді площина паралельна обом осям OX і OY , тобто паралельна координатній площині XOY і перпендикулярна осі OZ .
3. Нехай $D = 0$. Дана площина проходить через початок координат – точку $O(0,0,0)$.
4. Припустимо, що $A = D = 0$ – площина паралельна осі OX та проходить через початок координат, отже, вісь OX належить площині.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то маємо рівняння $z = 0$, яке задає координатну площину XOY .

Площина також може бути визначена трьома своїми точками. Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три точки відповідно з радіус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 та \mathbf{r}_3 , які визначають деяку площину (див. рис. 2). Щоб записати її рівняння розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї ж площини. Тоді вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ – компланарні, отже, їх мішаний добуток нульовий, тобто $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$

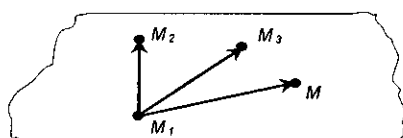


Рис. 2

є векторним **рівнянням площини, заданої трьома точками**.

Відповідне рівняння у координатній формі має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Приклад 1. Знайти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\mathbf{n} = (1; -1; 2)$.

Заданий вектор \mathbf{n} є нормаллю даної площини, а оскільки початок координат належить площині, в загальному рівнянні (3) слід покласти $D = 0$. Таким чином, шукане рівняння має вигляд $x - y + 2z = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить через три дані точки $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 2)$ та $C(-2, 1, 0)$.

$$\text{Запишемо рівняння площини у вигляді (5):} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } 8(x-1) - 8(z-3) = 0, \text{ або нарешті,}$$

$$x - z + 2 = 0.$$

Припустимо, що площина (3) не проходить через початок координат, тобто коефіцієнт $D \neq 0$, тоді рівняння площини можна подати у вигляді: $\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$, або $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, (6)

де $a = \frac{-D}{A}$, $b = \frac{-D}{B}$, $c = \frac{-D}{C}$ – відповідно точок перетину площини (3) з осями OX , OY та OZ . Зверніть увагу, якщо, наприклад, $A = 0$, то координату точки перетину площини із віссю OX визначити неможливо – площина їй паралельна. Рівняння (6) носить назву **рівняння площини у відрізках на осях**.

Двогранний кут α між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна визначити як кут між їх нормальними векторами $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (7)$$

Зауваження. Зрозуміло, що таким чином буде визначений лише один з двох двогранних кутів, інший рівний $\pi - \alpha$. З формули (7) випливає **умова перпендикулярності двох площин**, а саме: дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$. (8)

Умова паралельності двох площин еквівалентна умові колінеарності їх нормалей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. (9)

Приклад 3. Визначити кути між площинами $x - 3y + 7z - 5 = 0$ та $2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

Нормальними до заданих площин є вектори $\mathbf{n}_1 = (1, -3, 7)$ та $\mathbf{n}_2 = (2, -4, -2)$. Легко переконатись, що скалярний добуток цих векторів рівний нулю, тобто виконана умова (8): $1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) = 0$ – площини перпендикулярні.

Приклад 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2, 1, 0)$ перпендикулярно до площин $x + y - 2z - 3 = 0$ та $2x - y - z + 4 = 0$.

Оскільки шукана площина перпендикулярна до площин з нормальними векторами $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -2)$ та $\mathbf{n}_2 = (2, -1, -1)$, то її нормаль \mathbf{n} є перпендикулярною до обох нормалей \mathbf{n}_1 та \mathbf{n}_2 , а отже, колінеарна їх векторному добутку $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

Визначимо $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{-3; -3; -3\}$. Таким чином, можна вважати, що $\mathbf{n} = \{1; 1; 1\}$. Шукана площина тепер

визначається рівнянням (2): $(x-2) + (y-1) + z = 0$, або $x + y + z - 3 = 0$.

Приклад 5. Знайти об'єм тетраедра, утвореного координатними площинами та площиною $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Запишемо рівняння даної площини у вигляді рівняння (6), перенісши вільний член у праву частину та поділивши обидві частини рівняння на -12. Одержимо рівняння $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$. Отже, прямокутний тетраедр має ребра з довжинами 6, 4 та 3. Його об'єм рівний 12 кубічним одиницям.

Приклад 6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3, -1, 5)$ та відтинає рівні відрізки від координатних осей.

З умови випливає, що шукана площина може бути описана рівнянням виду (4), в якому $a = b = c$.

Залишилось підставити в це рівняння координати точки M_1 . Одержимо рівняння: $\frac{3}{a} - \frac{1}{a} + \frac{5}{a} = 1$, звідки $a = 7$. Отже, шукана площина визначається рівнянням $x + y + z - 7 = 0$.

Розглянемо (рис. 3) орт $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ нормалі, проведеної із початку координат до площини. Якщо позначити через $|\mathbf{OP}| = p \geq 0$ відстань від початку координат до площини,

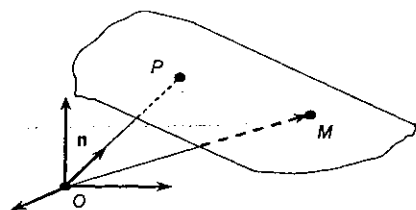
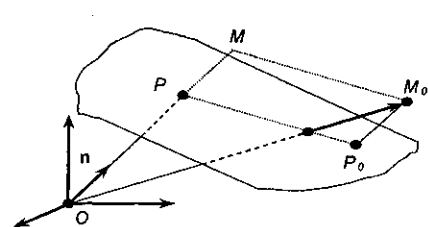


Рис. 3

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка простору, яка розташована з протилежного боку ніж початок координат відносно площини. Тоді для неї справджується очевидна рівність (див рис. 4):



то для довільної точки $M(x, y, z)$ площини маємо рівність $np_n \mathbf{OM} = p$, або $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ (10)

Дане рівняння називається **нормальним рівнянням площини**, оскільки в ньому фігурує орт особливої нормалі площини – проведеної із початку координат. Щоб записати рівняння (3) у **нормальній формі**, необхідно

помножити обидві частини рівняння на коефіцієнт $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

підібравши знак так, щоб виконувалось $D\mu \leq 0$.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка простору, яка розташована з протилежного боку ніж початок координат відносно площини. Тоді для неї справджується очевидна рівність (див рис. 4): $np_n \mathbf{OM}_0 = |\mathbf{OP}| + |\mathbf{PM}_0| = p + |\mathbf{PM}_0| = p + d$, де $d = M_0 P_0$ – відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини. Отже, в цьому випадку маємо $d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$. Якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ розташована по той самий бік від площини, що й початок координат, то аналогічними міркуваннями (зробіть малюнок самостійно) доходимо висновку, що $np_n \mathbf{OM}_0 = p - d$, отже, $d = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p)$. Введемо у розгляд величину $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$. (11)

Вона зветься **відхиленням** точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини і є результатом підстановки її координат у нормаль-

не рівняння площини (10). Відхилення точки M_0 **додатне**, якщо точка та початок координат розташовані по різні боки від площини і **від'ємне**, якщо точка M_0 та початок координат розташовані по один бік площини. У будь-якому випадку, $d = |\delta|$.

Приклад 7. Знайти відстань та відхилення точки $M_0(-1, 2, 5)$ від площини $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

Довжина нормалі заданої площини дорівнює $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Щоб записати нормальне рівняння цієї площини, досить поділити обидві частини заданого рівняння на коефіцієнт $-\sqrt{14}$. Отже, нормальне рівняння матиме вигляд: $\frac{-x + 2y - 3z - 1}{\sqrt{14}} = 0$. Визначимо відхилення точки M_0 : $\delta = \frac{1 + 4 - 15 - 1}{\sqrt{14}} = \frac{-11}{\sqrt{14}}$ — точка та початок

координат знаходяться: **по один бік** площини; відстань точки M_0 від площини рівна $d = \frac{11}{\sqrt{14}}$.

Приклад 8. Скласти рівняння площин, паралельних площині $4x - 2y - 4z - 5 = 0$ та розташованих на відстані 2 одиниць від неї.

Щоб записати нормальне рівняння цієї площини, досить поділити обидві частини заданого рівняння на коефіцієнт $\pm \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \pm 6$, причому знак треба вибрати так, щоб вільний член нормального рівняння був від'ємним. Отже, нормальне рівняння заданої площини матиме вигляд: $\frac{4x - 2y - 4z - 5}{6} = 0$. Тому рівняння

паралельних площин, які розташовані на відстані 2 одиниць від неї, матимуть вигляд: $\frac{4x - 2y - 4z - 5}{6} \pm 2 = 0$.

Таким чином, шуканими є площини $4x - 2y - 4z + 7 = 0$ та $4x - 2y - 4z - 17 = 0$.